Artículo
Revista digital Matemática, Educación e Internet (www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/). Vol. 8, Nº 1. 2007

De la Resolución de Ecuaciones Polinómicas al Álgebra Abstracta: un Paseo a Través de la Historia.

Cristina Ochoviet
cristinaochoviet@gmail.com
Instituto de Profesores "Artigas"
Montevideo, Uruguay

Resumen

Realizaremos un paseo histórico a lo que ha sido la resolución de ecuaciones polinómicas y en general el desarrollo del álgebra. La intención es presentar una síntesis de algunas de las dificultades que se enfrentaron a lo largo de la historia, en la construcción de los significados y conceptos matemáticos, referidos principalmente a la resolución de ecuaciones polinómicas y al desarrollo del álgebra abstracta. Creemos que el conocimiento de estas nos brinda información importante acerca de los posibles obstáculos y dificultades que pueden enfrentar nuestros estudiantes al abordar el estudio de tales tópicos.

Palabras claves: historia de la matemática, ecuaciones, álgebra.

1.1 Evolución histórica de la resolución de ecuaciones polinómicas

Hasta el descubrimiento y la traducción de tablillas babilónicas se consideró a la matemática egipcia como la más avanzada del segundo milenio antes de Cristo.

Los egipcios resolvieron ecuaciones lineales por el método de la falsa posición. Este método también fue utilizado por los babilonios, contemporáneamente con los egipcios, y posteriormente por los árabes. El siguiente problema aparece en el Papiro Rhind (S. XVII a.C.):

"Un montón, sus dos tercios, su mitad, todos juntos hacen trece. ¿Cuál es la cantidad?" (Guelli, 1989)

El problema se reduce a la ecuación:

$$x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x = 13$$

Guelli señala que las ecuaciones venían expresadas totalmente con palabras pues el álgebra puramente simbólica estaba aún muy lejos de ser creada.

Los egipcios encontraban la solución de este tipo de ecuación a través de un método llamado *regla de falsa posición*. En primer lugar atribuían un valor falso al *montón*, por ejemplo, 12:

$$12 + \frac{2}{3}(12) + \frac{1}{2}(12) = 12 + 8 + 6 = 26$$

Luego, mediante una regla de tres simple se obtiene el valor verdadero del *montón*, que en este caso es 6.

$$\text{Valor verdadero} = \frac{12 \times 13}{26} = 6$$

Este método es un ejemplo del uso de aproximaciones, en que se parte de un valor falso y se procura corregirlo para mejorar el resultado. En este caso permite obtener la solución exacta por la estructura particular del problema.

Guelli aclara que esta regla solamente funciona para las ecuaciones de la forma $ax = b$. Si un problema exige la solución de la ecuación $ax + b = c$, la regla no funciona. Supuestamente, ya antes de Cristo, los babilonios y también los chinos, usaban en este caso la regla de doble falsa posición, que consiste en el procedimiento que describimos a continuación.

Para hallar x tal que $ax+b=c$, se atribuyen a x dos valores falsos x_1 y x_2 y se calculan ax_1+b y ax_2+b.

Sean $d_1 = ax_1+b-c$ y $d_2 = ax_2+b-c$, se plantea la proporción $\dfrac{d_1}{x_1-x} = \dfrac{d_2}{x_2-x}$ y se despeja x, obteniendo $x = \dfrac{x_1d_2 - x_2d_1}{d_2-d_1}$, que es el número buscado.

No son conocidos registros del tratamiento de ecuaciones polinómicas de segundo grado por los egipcios, pero los historiadores sospechan que ellos dominaban alguna técnica de resolución de esas ecuaciones. Esa creencia se basa en el hecho de que se encontró en el papiro de Kahun, la resolución de una ecuación que hoy se escribiría $x^2+y^2=k$, k un número positivo, por el método de *falsa posición*.

El primer registro conocido de resolución de problemas que involucran una ecuación de segundo grado data de 1700 a.C., aproximadamente y fue encontrado en una tabla de arcilla, redactado a través de palabras. La solución era presentada como una receta matemática y se daba solamente la raíz positiva. Veamos un ejemplo:

"He sumado el área y los dos tercios del lado de mi cuadrado y el resultado es 0;35[1]. Dos tercios es 0;40. La mitad del resultado 0;20, usted lo multiplica por 0;20 y obtiene 0;6,40** que añade a 0;35 y esta suma, 0;41,40, tiene a 0;50 por raíz cuadrada. 0; 20 que ya ha multiplicado usted por sí mismo, lo resta de 0;50 y 0;30 es el lado del cuadrado".*

(PRO Ciencia Conicet, 1987 a)

En el enunciado los números están expresados en forma sexagesimal y se desprende del enunciado del problema que se está resolviendo la ecuación que escribiríamos:

$$x^2 + 0.40x = 0.35$$

y obtienen como solución:

[1]* La notación que se usa está en base sexagesimal. Para interpretarla en sistema decimal, hacemos la siguiente conversión: $0;35_{(60)}=[35\times 60^{-1}]_{(10)}$

** $0;6,40_{(60)}=[6\times 60^{-1}+ 40\times 60^{-2}]_{(10)}$

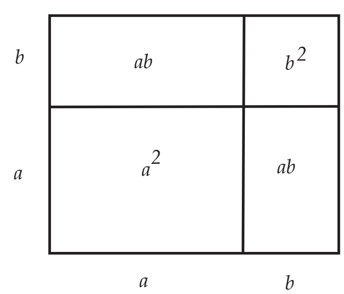
$$x = \sqrt{\left(\frac{0,40}{2}\right)^2 + 0,35} - \frac{0,40}{2} = 0,30$$

Para su resolución están usando la fórmula resolvente de la ecuación de segundo grado que usamos hoy en día. La única diferencia es que solamente obtienen la raíz positiva, que en este contexto, es además, la única que tiene sentido.

También reconstruían la ecuación de segundo grado a partir del producto y de la suma de sus raíces. Resolvieron ecuaciones de primer grado y, conocieron y utilizaron algunas identidades algebraicas que con nuestra simbología pueden expresarse:

$$\begin{aligned}
(a-b)(a+b) &= a^2 - b^2 \\
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2
\end{aligned}$$

Algunos historiadores suponen que pueden haber llegado a estos resultados a través de representaciones geométricas, como la conocida figura que presentamos a continuación:



También resolvieron ecuaciones de tercer grado del tipo $x^3 + x^2 = a$, a partir de tablas en las que se daban las sumas de los cuadrados más los cubos de un mismo número. Mediante una sustitución de variables conveniente, resolvían también ecuaciones de la forma $x^3 + px - q = 0$.

Del análisis de diversos textos babilónicos se desprende que resolvieron los siguientes tipos de ecuaciones con una incógnita, aunque las tres últimas solamente en algunos casos particulares (PRO Ciencia Conicet, 1987 a):

$$\begin{aligned} ax &= b \\ x^2 &= a \\ x^2+ax &= b \\ x^2-ax &= b \\ ax^2+bx &= c \\ x^3 &= a \\ x^3+x^2 &= a \\ x^3+px^2 &= a \\ mx^3+px^3 &= a \end{aligned}$$

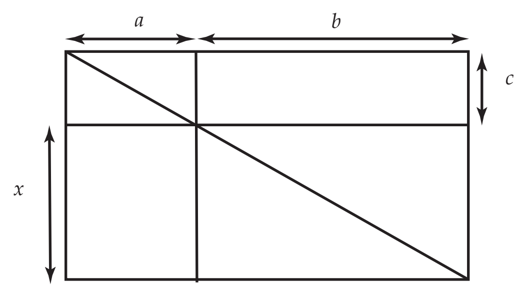
Los trabajos de los babilonios y los egipcios evidencia que, en general, los resultados se obtienen por procedimientos empíricos, las soluciones son aproximadas, los problemas surgen de situaciones concretas de índole práctica y no abundan las generalizaciones.

La civilización griega (500 a 200 a.C.) utilizó procedimientos geométricos para resolver muchos problemas, entre ellos la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado. Esto se debería a la aparición de los números irracionales unido a la falta de practicidad del sistema de numeración griega. Quizás esto hizo que los griegos se sintieran más seguros ante las figuras geométricas que ante los números y por ello Euclides desarrolló gran parte de la aritmética y de la teoría de números con una perspectiva geométrica. Las magnitudes eran representadas por segmentos y el producto de dos magnitudes a y b era representado por el rectángulo de lados a y b. Los griegos advirtieron que, mientras que la ecuación $x^2 = 2$ no admitía solución racional, tenía una solución trivial desde el punto de vista geométrico, pues x es la diagonal de un cuadrado de lado unidad. (PRO Ciencia Conicet, 1987 a)

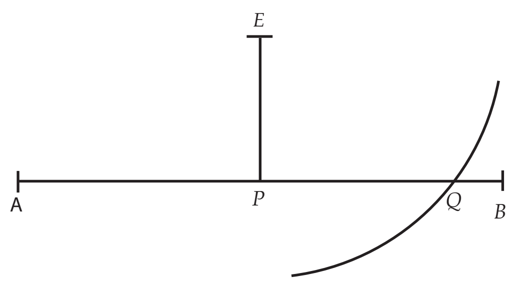
De modo similar, la solución a la ecuación $x.a = b.c$ está dada por la figura siguiente, donde a, b y c se toman respecto de una unidad arbitraria:

A continuación se describe uno de los procedimientos usados por los griegos para resolver, por ejemplo, la ecuación que en nuestros días se escribe $x^2-10x+9=0$:

"Trace el segmento AB=10. Por P, punto medio de AB, levante el segmento perpendicular PE=3 (igual a la raíz cuadrada de nueve) y, con centro en E y radio PB, trace un arco de



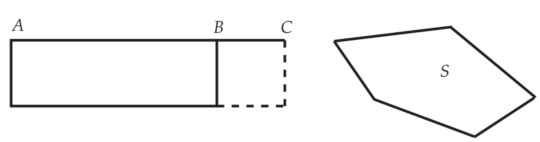
circunferencia que corta a AB en el punto Q. La raíz deseada está dada por la medida AQ". (Da Cunha Fragoso, 2000)



Por construcción, la medida del segmento AQ es $\frac{10}{2}+\sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2-\left(\sqrt{9}\right)^2}$ que corresponde a una de las raíces de la ecuación: 9.

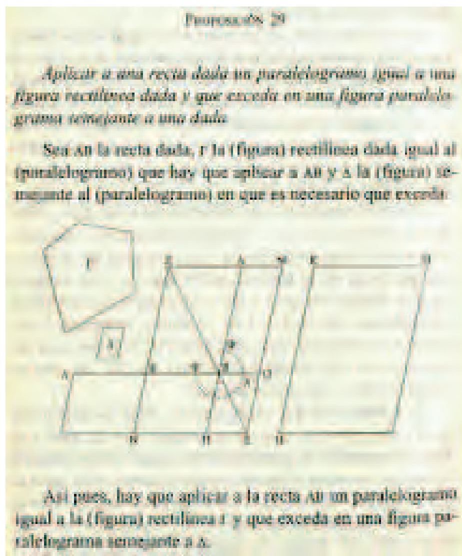
En los Elementos (Libro VI), Euclides desarrolla aspectos teóricos para resolver en forma geométrica problemas como los siguientes:

Aplicar a un segmento dado $AB = a$ un rectángulo de área dada S de forma que el exceso sea un cuadrado.



Este problema es equivalente a resolver la ecuación $x(a+x) = S$.

Cuando dice aplicar a un segmento dado $AB = a$ un rectángulo de área dada S de forma que el exceso sea un cuadrado, el área dada S se daba a través de una superficie cualquiera cuya área es S. El mismo Euclides daba el área dada a través de una figura que él llamaba rectilínea. En los propios Elementos esa área aparece dada por un cuadrilátero o por un pentágono. Recordemos que Euclides manejaba las magnitudes a través de figuras geométricas, era la forma de dar un número positivo. En la Proposición 29 del Libro VI, Euclides resuelve este problema pero en forma general. Podemos apreciar en la imagen que sigue la presencia de la figura rectilínea Γ que representa el área dada.



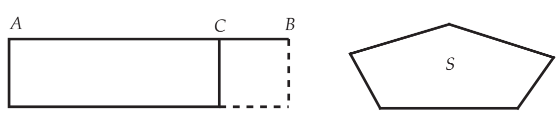
Proposición 29

Aplicar a una recta dada un paralelogramo igual a una figura rectilínea dada y que exceda en una figura paralelogramo semejante a una dada.

Sea AB la recta dada, Γ la (figura) rectilínea dada igual al (paralelogramo) que hay que aplicar a AB y Δ la (figura) semejante al (paralelogramo) en que es necesario que exceda.

Así pues, hay que aplicar a la recta AB un paralelogramo igual a la (figura) rectilínea Γ y que exceda en una figura paralelogramo semejante a Δ.

Aplicar a un segmento dado AB = a un rectángulo de área dada S deficiente en un cuadrado.



Haciendo $BC = x$, vemos que el problema equivale a resolver la ecuación $x(a - x) = S$.

Diofanto se destacó entre los griegos por ser el único que utilizó los números independizándose de su representación geométrica y en obtener reglas para manejarse con ellos. Introduce además, ciertas notaciones que marcan un primer paso hacia la escritura simbólica en el álgebra y un nuevo objeto al que llama *deficiencia*. Establece reglas para operar con él. Es decir, formula las reglas de los signos que ahora escribimos:

$$\begin{aligned}(-)\times(-) &= (+)\\ (-)\times(+) &= (-)\end{aligned}$$

Diofanto no da reglas para la adición y la sustracción de números positivos y negativos aunque las usa en sus libros. Si bien usó números negativos, éstos solamente aparecen en los cálculos intermedios pues para las soluciones considera solamente los racionales positivos. (Bashmakova y Smirnova, 2000).

La obra original de Diofanto está escrita en verso. De la misma forma procedieron los matemáticos hindúes en sus trabajos de álgebra. La matemática hindú se caracteriza por la utilización de un lenguaje poético y metafórico. Entre los aportes de los hindúes se señala el uso de cierto simbolismo, la introducción del sistema posicional decimal, la utilización del cero como operador y la resolución de algunas ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

Brahamagupta (598-670), define al cero como la diferencia entre un número y sí mismo y enuncia reglas aritméticas en términos de fortunas (números positivos) y deudas (números negativos), como ser:

"Una deuda menos cero es una deuda.
Una fortuna menos cero es una fortuna.
Cero menos cero es cero.
Una deuda que se sustrae a cero es una fortuna.
Una fortuna que se sustrae a cero es una deuda.
El producto de cero multiplicado por una deuda o fortuna es cero.

El producto de cero multiplicado por cero es cero"[2]

Entre los métodos de resolución empleados por los hindúes figuran, entre otros, la regla de tres y el *método de inversión* para resolver ecuaciones que consiste en "desandar lo andado", o sea realizar todas las operaciones en orden inverso. El siguiente es un ejemplo tomado del *Aryabhatiya*:

"Si entendiste bien el método de inversión, dime, hermosa niña de ojos radiantes, ¿cuál es el número que multiplicado por 3, aumentado en las $3/4$ *partes del producto, dividido después entre* 7 *y disminuido en* $1/3$ *del cociente, multiplicado por sí mismo, restándole* 52, *extrayendo la raíz cuadrada, sumándole 8 y dividiéndole por* 10, *da el número* 2 *?" (Perero, 1994)*

La solución es 28 y se puede obtener partiendo del número 2 y realizando todas las operaciones inversas, en orden inverso al que aparecen en el enunciado del problema, es decir de atrás hacia delante:

$$\begin{aligned}(2\times 10-8)^2+52 &= 196\\ \sqrt{196} &= 14\\ \left(14\times\frac{3}{2}\times 7\times\frac{4}{7}\right)\div 3 &= 28\end{aligned}$$

Si bien los hindúes trabajaron con números negativos[3], como lo demuestran los enunciados de Brahamagupta donde da reglas aritméticas en términos de *fortunas* y *deudas*, la mayoría de los problemas planteados se relacionan con problemas de orden práctico y por tanto el número que les da solución es positivo. La cuestión que deseamos destacar es que los problemas matemáticos eran originados por situaciones de índole práctico y por tanto, admitieran o no soluciones negativas, estas no interesaban, ya que para el fin del problema solamente servían los números positivos.

Los árabes establecen lazos entre las diversas culturas. Por ello, un mismo matemático usa algunas veces el método geométrico heredado de los griegos o el método al-

[2] En `http://www-groups.acs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Brahmagupta.html+`

[3] Sin darles esta denominación.

gebraico de los hindúes para resolver problemas similares:

"Confluyen en la ciencia árabe tres culturas matemáticas distintas: por una parte la babilónica, con su tradición astronómica y aritmética; por otra la griega, fundamentalmente platónica y aristotélica; y por otra parte la hindú, con una aportación básica, el sistema de numeración posicional, que habría de ser esencial para el desarrollo posterior de las matemáticas." (Casalderrey, 2000)

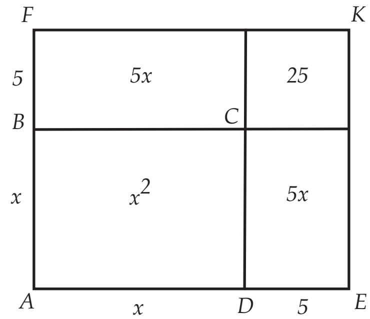
Entre las aportaciones de la cultura árabe mencionaremos las del gran matemático Al-Khwarizmi (800) que en opinión de Cardano debe ser considerado el padre del álgebra. La obra principal de Al- Khwarizmi es *Al-jabr wa'l Muqabala*. Esta obra tuvo una influencia muy significativa en las matemáticas occidentales de la Baja Edad Media y del Renacimiento. La traducción exacta de su título es dudosa. La palabra *jabr* podría significar algo similar a restauración, y en la actualidad podríamos identificarla como nuestro "pasar de un miembro al otro" en una ecuación para luego reducir. La palabra *muqabala* significaría lo que en la actualidad denominamos cancelar, y consistiría en la eliminación de los términos iguales que aparezcan en ambos miembros de una ecuación. Veamos un ejemplo tomado de Casalderrey (2000) para ilustrar mejor el significado de estas palabras árabes (en simbología actual):

$$x^2 + 3x = 3 - 2x \text{ se transforma por al-jabr en } x^2 + 5x = 3$$

$$x^2 + 3x + 5 = x + 5 \text{ se transforma por al-muqabala en } x^2 + 3x = x$$

Al-Khwarizmi aborda la resolución de seis tipos diferentes de ecuaciones (con coeficientes numéricos). Los diferentes tipos surgen a partir de que este matemático no consideraba el cero ni números negativos. Usando lenguaje actual estas ecuaciones serían de la forma: $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $bx = c$, $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$, $ax^2 = bx + c$. Describe en forma retórica la regla para resolver cada tipo de ecuación, no usa ningún tipo de simbolismo y los números que utiliza en los enunciados los escribe usando palabras. En esencia, utiliza la conocida fórmula resolvente de la ecuación de segundo grado, que en cada caso es explicada para los coeficientes numéricos que aparecen y luego da una prueba para cada ejemplo que consiste en el método geométrico de completar un cuadrado. Por ejemplo:

Resolver la ecuación, que usando simbología actual es $x^2 + 10x = 39$.



Se construye un cuadrado $ABCD$, con $AB = AD = x$. Se extienden los lados AB y AD de forma que $DE = BF = 5$ (5 es la mitad de 10, el coeficiente de x). Se completa el cuadrado $AFKE$. El área de $AFKE$ se puede expresar como $x^2 + 10x + 25$ pero la ecuación que hay que resolver es $x^2 + 10x = 39$, por lo tanto hay que agregar 25 a los dos miembros de la ecuación, obteniendo: $x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$ o sea $x^2 + 10x + 25 = 64$. Los miembros de la ecuación son ahora cuadrados perfectos: $(x + 5)^2 = 8^2$ entonces $x + 5 = 8$, y por tanto $x = 3$ (Perero, 1994).

En el siglo XII comienza la decadencia de la ciencia islámica en Oriente mientras que en España alcanza su culminación para también decaer. Simultáneamente, en el siglo XIII, comienza el renacimiento matemático occidental con Leonardo de Pisa (1170- 1240). Su labor no tiene seguidores de importancia y recién en el siglo XVI se produce un notable avance en Europa, gracias a los algebristas italianos: Cardano, Tartaglia, Del Ferro y Bombelli, entre otros. Del Ferro y Tartaglia resuelven la ecuación de tercer grado, Ferrari la de cuarto y Cardano publica ambas soluciones en medio de una gran polémica.

Los trabajos de Cardano son formulados en álgebra retórica y usa términos geométricos para las justificaciones. No da una demostración en el contexto del álgebra retórica pues en su época solamente eran consideradas demostraciones las que estaban basadas en razonamientos geométricos. Las soluciones a las ecuaciones de tercer y cuarto grado son expresadas por medio de radicales. Entre otros, los procedimientos empleados para obtenerlas consisten en: cambios de variable, sustituciones y completar un cuadrado. No reconoce como soluciones a los números negativos ni al cero y le produce un gran desconcierto la aparición de raíces cuadradas de números negativos, desestimándolas como soluciones.

(Casalderrey, 2000)

Tartaglia encontró un método general para resolver las ecuaciones cúbicas de la forma $x^3 + px = q$. Este importante logro llegó a oídos de Gerolamo Cardano, quien invitó a Tartaglia a visitarlo para tratar de convencerlo de que le contara cómo era el método de resolución. Tartaglia se lo contó a condición de que Cardano mantuviera el secreto hasta que Tartaglia lo publicara. Cardano hizo caso omiso de su promesa y publicó antes que Tartaglia la solución de las ecuaciones cúbicas en su *Ars Magna* en 1545. (Casalderrey, 2000). La fórmula que en nuestros días es conocida como de Cardano-Tartaglia es la que aparece en el siguiente cuadro.

$$x^3 + px = q$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Posteriormente, muchos matemáticos contribuyeron a la solución de ecuaciones de tercer y cuarto grado, entre ellos, Viète, Harriot, Bezout y Descartes. En particular, destacamos el trabajo de Thomas Harriot (1560-1621) por su interesante contribución dado que acepta todas las soluciones ya sean reales o imaginarias e introduce simbología. Por ejemplo, escribe el cubo de la incógnita como *AAA*. En cuanto a la invención del lenguaje algebraico, paso fundamental en la evolución del álgebra, existe actualmente un debate sobre si Harriot fue influenciado por Viète, o si fue que este último se nutrió de las ideas del primero.

"[...] Harriot did outstanding work on the solution of equations, recognising negative roots and complex roots in a way that makes his solutions look like a present day solution. He made the observation that if a, b, c are the roots of a cubic then the cubic is (x-a)(x-b)(x-c)=0 [4]*. This is a major step forward in understanding which Harriot then carried forward*

[4] En realidad la cúbica es de la forma *k(x-a)(x-b)(x-c)=0* con *k* diferente de 0.

to equations of higher degree".[5]

Leibnitz usa el resultado obtenido por Harriot para verificar que las raíces que se obtienen con la fórmula de Cardano-Tartaglia son correctas, reconstruyendo la ecuación cúbica a partir de sus tres raíces (dadas por la fórmula). Nadie antes que Leibnitz pareció pensar en este método directo de verificación. Esta constituyó la primera prueba algebraica de la fórmula pues todas las pruebas anteriores fueron de naturaleza geométrica.

Se le atribuye a Viète (1540- 1603), el teorema que establece que:

"[...] si un polinomio tiene como raíz $x = k$*, el polinomio* $p(x)$ *es divisible entre* $x - k$*, o lo que es igual, que puede escribirse en la forma* $p(x) = (x - k).c(x)$*, siendo* $c(x)$ *un polinomio de un grado menos que p(x)".* (Chica Bias, 2001)

Descartes (1596-1650) usa este resultado para probar la llamada *regla de los signos*, que iba a permitir saber, con sólo observar la secuencia de signos de los coeficientes de la ecuación, el número máximo de raíces reales positivas (que él llama raíces verdaderas) y negativas (raíces falsas) de la misma. Supone un polinomio ordenado según potencias decrecientes de la x, de coeficiente principal 1 e igualado a cero y enuncia que la ecuación tendrá como mucho tantas raíces verdaderas como cambios de signo y tantas raíces falsas como permanencia de signo. Cuando dice como mucho es para eliminar de la cuenta las posibles raíces imaginarias y las raíces repetidas.

Lo explicó basándose en un caso particular, construyendo con la idea de Viète, una ecuación de cuarto grado a partir de una de primer grado a la que "iba añadiendo sucesivamente nuevas raíces". Partió de la ecuación $x - 2 = 0$, en la que la única raíz verdadera es 2. La sucesión de coeficientes: 1, -2 da lugar a una sucesión de signos +, $-$ con un cambio de signo. A partir de ella creó una ecuación de segundo grado multiplicando por $(x - 3)$. La ecuación así obtenida $(x - 2)(x - 3) = 0$, es equivalente a $x^2 \ -5x + 6 = 0$ y tiene dos raíces verdaderas 2 y 3. La sucesión de los coeficientes: 1, -5, 6 da lugar a una de signos +, $-$, + donde hay dos cambios. Para construir una ecuación de tercer grado multiplicó por el factor $(x - 4)$. La nueva ecuación $(x^2 - 5x + 6)(x - 4) = 0$, es equivalente a $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$. En esta ecuación, cuyas raíces 2, 3, y 4 son las tres *verdaderas*, se observa que la

[5] En `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/$\sim$history/Mathematicians/Harriot.html`

sucesión de signos de los coeficientes: $+, -, +, -$ tiene tres cambios de signo. La regla enunciada parece cumplirse para raíces verdaderas. Finalmente, Descartes multiplicó por $(x+5)$ obteniendo la ecuación $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$. Esta ecuación de cuarto grado, con tres raíces verdaderas y una falsa, en la que la sucesión de signos de los coeficientes: $+, -, -, +, -$ presenta ahora tres cambios y una permanencia, y cumple con la regla enunciada. (Chica Bias, 2001)

Resulta difícil resumir en pocos renglones la historia de la resolución de ecuaciones polinómicas, pero podemos observar primeramente que ya desde los babilonios se deja entrever en los enunciados retóricos un amplio dominio de las técnicas aritméticas y la marcada presencia de la radicación. La resolución de ecuaciones aparece ligada fuertemente a problemas de índole práctica, en particular problemas que involucran áreas y distancias. Quizás por ello son relacionados o interpretados desde la geometría y desde este contexto se les da solución y justificación. Este contexto geométrico invade la historia del álgebra hasta el renacimiento inclusive. Esto queda bien ilustrado en las siguientes palabras de Cardano:

"La sexta cosa a señalar [es] que en cuanto el hombre haya llegado a conocer todos los capítulos [ecuaciones] hasta el relativo al cubo, que son 19 [incluidos, hacemos notar, los de primer y segundo grado], tendrá cuanto basta para cualquier caso algebraico, porque hasta el cubo se encuentra la gradación en la Naturaleza: de hecho hay líneas, superficies y cuerpos. Y las líneas corresponden a la incógnita lineal, las superficies a los cuadrados y los cuerpos a los cubos. Por tanto, si sobre éstos hemos dado noticias suficientes, se conocerá todo lo que es necesario. En realidad todo lo que añadiremos más allá, será por entretenimiento y no por el fruto que pueda obtenerse del [tal] estudio. Tales capítulos sucesivos no existen verdaderamente de por sí, sino por accidente, si bien existen [fórmulas] generales".
(Cardano (1545), referido en (Casalderrey, 2000), pág. 135)

En estas palabras de Cardano queda reflejado que las ecuaciones de cuarto grado no eran consideradas como algo natural, sino como una especie de ejercicio intelectual, que va más allá de la naturaleza y de la utilidad práctica que motivaba los problemas algebraicos.

1.2 De las ecuaciones al álgebra abstracta

La preocupación por obtener fórmulas generales dependientes de los coeficientes para resolver una ecuación de cualquier grado, continuó dominando el álgebra. Galois (1811-1832) se pregunta cuáles son las ecuaciones resolubles por radicales y cómo dada una ecuación puede determinarse si es resoluble o no. Utilizando la idea de grupo indica el camino que conduce a la respuesta. Así, la teoría de grupos nace resolviendo un problema del álgebra tradicional.

Entre 1830 y 1850 los algebristas ingleses, entre ellos Boole, Hamilton y Cayley, ampliaron el dominio del álgebra mediante el concepto de ley de composición, a nuevos objetos matemáticos como vectores, cuaterniones y matrices. Los cuaterniones fueron inventados por Hamilton en 1843. Son de la forma $a+bi+cj+dk$ con a, b, c y d reales, a es la parte escalar y el resto se denomina parte vectorial. La parte vectorial es la diagonal de un paralelepípedo de dimensiones b, c y d. Cuando Hamilton trató de introducir a los cuaterniones en el conjunto de los números complejos se encontró con algo que lo sorprendió: encontró un sistema que contenía divisores de cero. (Bashmakova & Smirnova, 2000)

En efecto, en el conjunto de los complejos, se cumple que:

$$x^2+1=(x+i)(x-i)$$

Sustituyendo la unidad j por x se obtiene:

$$(j+i)(j-i)=j^2+1=0$$

"El álgebra de Hamilton (1853) introduce el cero como elemento operativo por medio de la fórmula ab=0 siendo a y b distintos de cero. Estos números fungen como "divisores del cero". La condición es que conformen un anillo, siendo ambos incongruentes con el cero".[6]

Otra observación importante es que mientras que la multiplicación de los complejos es conmutativa, la de los cuaterniones no lo es. Este descubrimiento, y también el de las matrices por parte de Arthur Cayley (1821-1865), otro ejemplo de álgebra no conmutativa y con divisores de cero, abrieron las puertas a nuevas álgebras abstractas. Este tipo de hallazgos unido al nacimiento de las geometrías no euclideanas impulsó a los matemáticos del siglo XIX a liberarse de las costumbres y

[6] En `http://www2.gratisweb.com/revsalamandra/columnahueca.html`

los hábitos mentales. (PRO Ciencia Conicet, 1987 b)

Podríamos agregar que estos hallazgos producen una nueva visión hacia las verdades matemáticas tornándolas de absolutas a relativas o condicionándolas a un campo de validez.

Hacia fines del siglo XIX, la imagen del álgebra como la disciplina que trata de las ecuaciones polinómicas y de las formas algebraicas, va de a poco cambiando para transformarse en la disciplina que trata de las estructuras algebraicas. El trabajo de Heinrich Weber (1842- 1913) fue una de las principales contribuciones en este sentido, pues posibilitó un importante movimiento hacia la comprensión de la idea de una estructura algebraica y hacia la adopción del acercamiento estructural. En las siguientes palabras de Weber pueden apreciarse estos conceptos:

"The theory appears here as a direct consequence of the concept of field, itself an extension of the concept of group. It appears as a formal law without any regard to the numerical meaning of the elements involved... The theory is thus conceived as a pure formalism, which acquires life and content only when the elements are assigned with numerical values". (Weber (1893), referido en Corry (1996), pág. 36)

Entre las propiedades de un cuerpo, Weber menciona que para que un producto sea cero, es necesario que por lo menos uno de los factores lo sea. También dice que podemos considerar estructuras con divisores de cero como las congruencias módulo n, tomando n compuesto en lugar de primo.

En 1910, Ernest Steinitz publica una teoría abstracta de cuerpos, que constituye un paso decisivo en la consolidación y adopción del enfoque estructural en álgebra. Steinitz trabaja en la formulación abstracta del concepto de cuerpo introducido por Weber. Una de las principales fuentes de inspiración del trabajo innovador de Steinitz proviene de las ideas de Kurt Hensel (1861- 1941).

A Hensel se debe la invención de la teoría de los números p-ádicos. Un número racional g-ádico es una serie de la forma:

$$A = a_r + a_{r+1}g^{r+1} + a_{r+2}g^{r+2} + ...$$

donde r es un entero, g es un entero positivo y los a_i son racionales expresados como fracciones irreducibles cuyo denominador no tiene factores comunes con g. Hensel notó que si tomamos un número primo p como base, el producto de dos números p-ádicos es cero si y sólo si uno de los factores es cero. Sin embargo, esto no sucede si tomamos un número no primo g como base. Para Hensel su teoría era una extensión de trabajos previos sobre números algebraicos y resultó poco natural para él considerar una estructura con divisores de cero. Sin embargo en su segundo libro comienza su trabajo con la definición más general, usando una base genérica g e introduce más tarde el caso en que se toma como base un número primo, como un caso particular. En este cambio parece haber influido su alumno Abraham Fraenkel.

Fraenkel también colaboró en los trabajos de su tío, el matemático Alfred Loewy (1873- 1935). Loewy trabaja con los números enteros, define la adición y la multiplicación de enteros positivos y establece luego la regla para el producto de dos enteros negativos. No introduce el concepto de anillo pero señala que el sistema de los enteros no es un cuerpo. A pesar de esto dice que algunos de los teoremas válidos para cuerpos lo son también en este sistema. Este es el caso del teorema que establece que el producto de dos enteros es cero, si y solo si uno de ellos lo es. Para probar esto usa el hecho de que el producto de dos enteros positivos es siempre un número positivo, el producto de un positivo por un negativo es negativo, y el producto de dos negativos es siempre positivo. Como consecuencia de este teorema, se prueba la propiedad cancelativa respecto del producto. (Corry, 1996)

De los trabajos de Loewy surge un potencial interés hacia el estudio de los sistemas de números que contienen divisores de cero. Fraenkel dirige su atención al estudio de estos sistemas y redirige las ideas de Loewy y Hensel en una nueva dirección que conduce a la definición e investigación de los anillos abstractos. Fraenkel trabaja en la elaboración de una axiomática para el sistema de los números p-ádicos de Hensel. Este trabajo, conjuntamente al de Hensel sobre cuerpos abstractos, sugieren una nueva dirección, que Fraenkel toma en su último trabajo: la elaboración de una teoría abstracta de dominios similar a los cuerpos de Steinitz, pero con divisores de cero. (Corry, 1996)

En el libro de Hensel de 1913, los anillos son definidos como dominios que satisfacen todas las propiedades de los axiomas de cuerpo, excepto el último. Este axioma establece simultáneamente, la existencia de un elemento identidad para la multiplicación, la existencia de un inverso respecto de la multiplicación para todo elemento y la no existencia de divisores de cero. En el sistema de axiomas para un anillo que Fraenkel escribe en 1914, estos tres puntos son separados en axiomas. Es así que Fraenkel inicia el estudio de los anillos abstractos, definiéndolos como dominios muy similares a los cuerpos, pero que poseen divisores de cero. El análisis que realiza de los números p-ádicos permite clarificar la diferencia entre los dominios con y sin divisores de cero. La importancia del trabajo de Fraenkel radica en que amplió los casos de entidades que debían ser reconocidas como pertenecientes a algún tipo de estructura algebraica.

Esta breve reseña histórica nos permite observar, cómo, poco a poco, el estudio de las estructuras algebraicas se convierte en la principal tarea del álgebra, de cara al siglo XX. También podemos apreciar cómo la aparición de estructuras con divisores de cero posibilita la delimitación del concepto de anillo, separándolo del concepto de cuerpo. Asimismo la no existencia de divisores de cero pasa a ser una propiedad característica de los cuerpos.

1.3 A manera de cierre

Intentamos en este trabajo mostrar una panorámica general sobre la evolución de la resolución de ecuaciones polinómicas y en general del desarrollo del álgebra. Nuestro objetivo fue aportar ciertos elementos que permitan entender algunas de las dificultades que se enfrentaron a lo largo de la historia, en la construcción de los significados y conceptos del álgebra, en el área que nos enfocamos. Consideramos que el conocimiento de episodios de la historia de la matemática nos ayuda a tomar conciencia sobre las dificultades en la construcción del conocimiento y aporta elementos útiles tanto para nuestra profesionalización como docentes como para comprender las dificultades de nuestros estudiantes al enfrentar el estudio de las matemáticas.

Bibliografía

[1] Bashmakova, I. y Smirnova, G. (2000). The Beginnings & Evolution of Algebra. The Dolciani mathematical Expositions, 23. United States of America: The Mathematical Association of America.

[2] Boyer, C. (1992). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Universidad Textos. Pp. 685-737.

[3] Casalderrey, F. (2000). *Las matemáticas en el Renacimiento italiano*. Nivola libros y ediciones, S. L. Madrid.

[4] Chica Bias, A. (2001). *Descartes. Geometría y método*. Nivola libros y ediciones, S. L. Madrid. Pp. 127-130

[5] Corry, L. (1996). *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, Birkhäuser Verlag.

[6] Da Cunha Fragoso, W. (2000).Uma abordagem histórica da equaçao do 2^o grau. Revista do Professor de Matemática, 43, pp. 20-25.

[7] Euclides. *Elementos (Libros I-VI)*. Madrid: Planeta De Agostini (1999).

[8] Guelli, O. (1989). A regra da falsa posiçao. Revista do Professor de Matemática, 15, pp. 18-22.

[9] Perero, M. (1994). *Historia e historias de matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

[10] PRO Ciencia Conicet. (1987 a).Álgebra. Su Enseñanza. Estructura Modular 3. Buenos Aires: Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas. (Documento Nacional Argentino).

[11] PRO Ciencia Conicet. (1987 b). Álgebra. Su Enseñanza. Estructura Modular 4. Buenos Aires: Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas. (Documento Nacional Argentino).

[12] `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Brahmagupta.html` (27/11/2003)

[13] `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Harriot.html` (27/11/2003)

[14] `http://www2.gratisweb.com/revsalamandra/columnahueca.html` (23/08/2004)